0001125094788999

金沢大学

2013年 理系 第1問

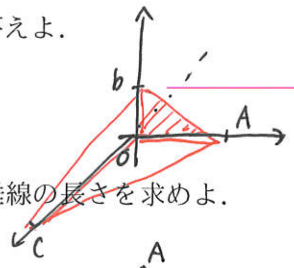
数理 石井K

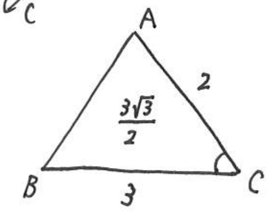
$\boxed{1}$ 正の実数 a, b, c に対して，O を原点とする座標空間に 3 点 A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$ がある．AC $= 2$，BC $= 3$ かつ △ABC の面積が $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ となるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\sin\angle$ACB の値を求めよ．また，線分 AB の長さを求めよ．

(2) a, b, c の値を求めよ．

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ．また，原点 O から △ABC に下ろした垂線の長さを求めよ．





(1) △ABC の面積を S とおくと．

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \sin\angle ACB$$

$\therefore\ \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot \sin\angle ACB = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ となり．

$$\underline{\sin\angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{2}}\ //$$

ここで，$AB = \sqrt{a^2+b^2}$，$AC = \sqrt{a^2+c^2}$，$BC = \sqrt{b^2+c^2}$

余弦定理より $\cos\angle ACB = \dfrac{a^2+c^2+b^2+c^2-a^2-b^2}{2\cdot\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}} = \dfrac{2c^2}{2\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+c^2}} > 0$

ちょっと難しい

より．$\cos\angle ACB = \dfrac{1}{2}$

再び余弦定理より．$AB^2 = 4+9-2\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 7$ $\quad\therefore\ \underline{AB = \sqrt{7}}\ //$

(2) $AB = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{7}$ $\quad\therefore\ a^2+b^2 = 7\ \cdots$①

$BC = \sqrt{b^2+c^2} = 3$ $\quad\therefore\ b^2+c^2 = 9\ \cdots$②

$CA = \sqrt{c^2+a^2} = 2$ $\quad\therefore\ c^2+a^2 = 4\ \cdots$③

①＋②＋③ より $2(a^2+b^2+c^2) = 20$ $\quad\therefore\ a^2+b^2+c^2 = 10\ \cdots$④

②と④より．$a^2 = 1$，①と④より $c^2 = 3$，③と④より $b^2 = 6$

$\therefore\ a, b, c > 0$ より．$\underline{a = 1,\ b = \sqrt{6},\ c = \sqrt{3}}\ //$

(3) 底面が △OAB の三角すいとみると，体積は．$\frac{1}{2}\times a\times b\times c\times\frac{1}{3} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}\ //$

高さは c なので

垂線の長さを h とすると．$\triangle ABC\times h\times\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\therefore\ h = \frac{\sqrt{2}}{2}\times 3\times\frac{2}{3\sqrt{3}} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{3}}\ //$