

2013年理工B方式第5問



5 次の問に答えよ.

- (1) 不定積分 $\int te^t dt$ を求めよ.
- (2) $0 \leq a \leq 1$ を満たす定数 a について, 定積分 $S = \int_0^1 |t-a|e^t dt$ を a を用いて表せ.
- (3) a が $0 \leq a \leq 1$ の範囲を動くとき, S を最小とするような a の値を求めよ.

$$\begin{aligned} (1) \int t(e^t)' dt &= te^t - \int e^t dt \\ &= \underline{(t-1)e^t + C} \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) S &= \int_0^a (a-t)e^t dt + \int_a^1 (t-a)e^t dt \\ &= a \int_0^a e^t dt - \int_0^a te^t dt + \int_a^1 te^t dt - a \int_a^1 e^t dt \\ &= a[e^t]_0^a - [(t-1)e^t]_0^a + [(t-1)e^t]_a^1 - a[e^t]_a^1 \\ &= a(e^a - 1) - (a-1)e^a - 1 - (a-1)e^a - a(e - e^a) \\ &= \underline{2e^a - (e+1)a - 1} \end{aligned}$$

(3) (2) で求めた S を $S(a)$ で表すと.

$$S'(a) = 2e^a - (e+1)$$

$$\therefore S'(a) = 0 \text{ の解は } a = \log \frac{e+1}{2}$$

\therefore 右の増減表より.

a	0	...	$\log \frac{e+1}{2}$...	1
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		↓		↑	

$$S \text{ を最小とするのは } \underline{a = \log \frac{e+1}{2}}$$