横浜市立大学

2013年 医学部 第2問

$\boxed{2}$ a を正の定数とする．n を 0 以上の整数とし，多項式 $P_n(x)$ を n 階微分を用いて

$$P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-a^2)^n \quad (n \geqq 1), \quad P_0(x)=1$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $n=2$ および $n=3$ に対して

$$P_2(-a), \quad P_3(-a)$$

を求めよ．

(2) $u=u(x)$，$v=v(x)$ を何回でも微分可能な関数とする．そのとき，**ライプニッツの公式**

$$(uv)^{(n)}={}_n\mathrm{C}_0u^{(n)}v+{}_n\mathrm{C}_1u^{(n-1)}v'+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}u'v^{(n-1)}+{}_n\mathrm{C}_nuv^{(n)}$$

を数学的帰納法を用いて証明せよ（ただし，$n \geqq 1$）．ここで，$w^{(k)}$ は $w=w(x)$ の第 k 次導関数を表し，また $w^{(0)}=w$ とする．

(3) 一般の n に対して

$$P_n(-a), \quad P_n(a)$$

を求めよ．