横浜市立大学

2016年 医学部 第3問

$\boxed{3}$ 関数 $y=\tan x$ は，区間 $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$ で単調増加である．したがって，この区間で逆関数を作ることが出来る．それを

$$y=\phi(x)\quad(-\infty<x<\infty)$$

と書く（この逆関数を Arctan x と書く参考書もある）．正確を期すために，$-\dfrac{\pi}{2}<\phi(x)<\dfrac{\pi}{2}$ としておく．以下の問いに答えよ．ただし,「$-\infty<x<\infty$」は「x は実数」という意味である．

(1) 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\phi(\sqrt{2}x+1)+\phi(\sqrt{2}x-1)\right\}$$

とおく．$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 積分

$$\int_0^1\frac{1}{x^4+1}\,dx$$

を求めたい．正確な値は求められないので，以下のようにする．即ち，関数 $G(x)$ で

$$\int_0^1\frac{1}{x^4+1}\,dx=G(\sqrt{2}+1)$$

となる関数を求めよ．

(3) 積分の等式

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^4 x}\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^4 x}\,dx$$

を示せ．

(4) 積分

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^4 x}\,dx$$

を求めよ．