横浜市立大学

2013 年 医学部 第 2 問

$\boxed{2}$ a を正の定数とする．n を 0 以上の整数とし，多項式 $P_n(x)$ を n 階微分を用いて

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - a^2)^n \quad (n \geqq 1), \quad P_0(x) = 1$$

とおく．以下の問いに答えよ．

(1) $n = 2$ および $n = 3$ に対して

$$P_2(-a), \quad P_3(-a)$$

を求めよ．

(2) $u = u(x)$，$v = v(x)$ を何回でも微分可能な関数とする．そのとき，**ライプニッツの公式**

$$(uv)^{(n)} = {}_n\mathrm{C}_0 u^{(n)} v + {}_n\mathrm{C}_1 u^{(n-1)} v' + \cdots + {}_n\mathrm{C}_k u^{(n-k)} v^{(k)} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} u' v^{(n-1)} + {}_n\mathrm{C}_n u v^{(n)}$$

を数学的帰納法を用いて証明せよ（ただし，$n \geqq 1$）．ここで，$w^{(k)}$ は $w = w(x)$ の第 k 次導関数を表し，また $w^{(0)} = w$ とする．

(3) 一般の n に対して

$$P_n(-a), \quad P_n(a)$$

を求めよ．