山梨大学

2011 年 教育人間科学・生命環境（生命工以外） 第 2 問

$\boxed{2}$ 実数全体で定義された関数 $F(x)$ が次の条件 ① と ② の両方を満たすとき「$F(x)$ は性質 (P) を持つ」ということにする．

① すべての実数 x について $F(x) > 0$ である．

② $F(x)$ は何度でも微分が可能で $\dfrac{d^2}{dx^2}\log F(x) = \dfrac{1}{\{F(x)\}^2}$ を満たす．

(1) $y = f(x)$ が性質 (P) を持つとき $y''y - (y')^2 = 1$，$y'''y - y''y' = 0$ となること，および $\dfrac{y''}{y}$ は正の定数であることを示せ．

(2) $y = f(x)$ は性質 (P) を持つとする．$\dfrac{y''}{y} = k^2$（k は正の定数）とおくとき，$k^2y^2 - (y')^2 = 1$ であることを示し，さらに $ky - y' > 0$ および $ky + y' > 0$ が成り立つことを示せ．

(3) c を実数とする．(2) のとき，関数 $kf(c)y + \dfrac{1}{k}f'(c)y'$ も性質 (P) を持つことを証明せよ．ただし ① を示すために

$$kf(c)y + \frac{1}{k}f'(c)y' = f(c)(ky \mp y') \pm \frac{1}{k}y'(kf(c) \pm f'(c)) \quad \text{（複号同順）}$$

を利用してもよい．