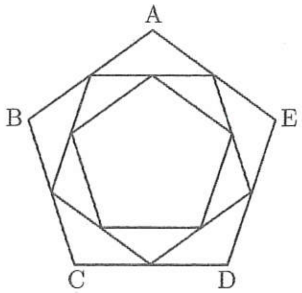
0002080639197999

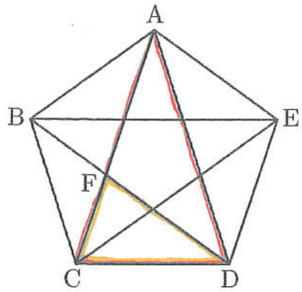
山梨大学

2015年 教育人間科学・生命環境（生命工以外）第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 下の図のように，ABCDEを頂点とする正五角形 P_1 を考える．P_1 の各辺の中点をとり，その中点を順に結び正五角形 P_2 をつくる．さらに，正五角形 P_2 の各辺の中点をとり，その中点を順に結び正五角形 P_3 をつくる．以下，これを繰り返す．正五角形 P_1 の一辺の長さを1，正五角形 P_n ($n=1, 2, 3, \cdots$) の一辺の長さを a_n としたとき，次の問いに答えよ．





(1) 対角線ACとBDの交点をFとする．△ACDと△DFCが相似であることを証明せよ．

(2) 対角線ACの長さを求めよ．

(3) a_n を n の式で表せ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ．

(1) 正五角形の1つの内角より，$\angle BCD = 108°$

また，$\triangle ABC$ は，$BA = BC$，$\angle ABC = 108°$ の二等辺三角形より，$\angle BCA = 36°$

よって，$\angle ACD = \angle BCD - \angle BCA = 72°$　同様にして，$\angle ADC = 72°$　$\therefore \angle CAD = 36°$

図形の対称性より，$\angle FDC = \angle CDE - \angle BDE = 108° - 72° = 36°$　$\therefore \angle DFC = 72°$

$\therefore \angle ACD = \angle DFC = 72°$，$\angle CAD = \angle FDC = 36°$

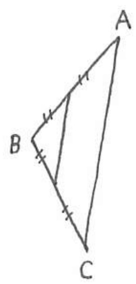
$\therefore$ 2つの角がそれぞれ等しいことより，$\triangle ACD \backsim \triangle DFC$ ▨

(2) (1)より，$AC : CD = DF : FC$

ここで，図形の対称性より，$AF = DF = CD = 1$，　$\therefore FC = AC - 1$

$\therefore AC : 1 = 1 : AC - 1$

$\therefore AC^2 - AC - 1 = 0$　$\therefore AC > 0$ より，$\underline{AC = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ //



(3) 右図より，$a_2 = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$　$\therefore a_{n+1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} a_n$　$\therefore \underline{a_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}}$ //

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{4}}$

$= \underline{(3+\sqrt{5}) \cdot \left\{1-\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n\right\}}$ //