山口大学

2014年 理（数理科学）・医 第2問

数理 石井K

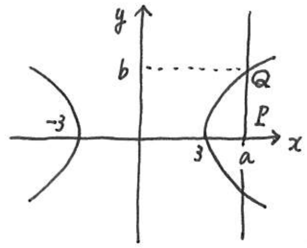
$\boxed{2}$ 座標平面において，方程式 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ が表す双曲線 C と点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ がある．ただし，$a>3$ とする．点 P を通り y 軸に平行な直線と双曲線 C との交点の一つである点 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ をとる．ただし，$b>0$ とする．さらに，点 Q における双曲線 C の接線 ℓ と x 軸との交点を $\mathrm{R}(c,\ 0)$ とする．このとき，次の問いに答えなさい．

(1) a を用いて b を表しなさい．

(2) a を用いて接線 ℓ の方程式を表しなさい．

(3) a を用いて c を表しなさい．

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PR}}$ を求めなさい．



(1) Q は C 上の点より $\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{b^2}{4}=1$ $\therefore \dfrac{4}{9}a^2-b^2=4$

$\therefore$ $b>0$ より $b=\dfrac{2}{3}\sqrt{a^2-9}$ //

(2) $\ell:\dfrac{ax}{9}-\dfrac{by}{4}=1$ (1)より b を消去して，$2ax-3\sqrt{a^2-9}\,y=18$ //

(3) (2)の式に $y=0$，$x=c$ を代入して，

$2ac=18$ $\therefore$ $c=\dfrac{9}{a}$ //

(4) $PQ=b$，$PR=a-\dfrac{9}{a}$ （$\because a>3$ より）

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{PQ}{PR}=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\sqrt{a^2-9}}{a-\frac{9}{a}}=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{9}{a^2}}}{1-\frac{9}{a^2}}=\frac{2}{3}$$ //