

2015年 第1問

1 関数

$$y = (\cos x - \sin x + 1) \sin 2x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

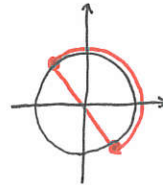
を考える。次の問いに答えよ。

- (1) $t = \cos x - \sin x$ とおくと、 t がとり得る値の範囲を求めよ。
 (2) y を t を用いて表せ。
 (3) y の最大値・最小値と、そのときの t の値をそれぞれ求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad t &= -\sqrt{2} \left(\sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= -\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$0 \leq x \leq \pi$ より、 $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi$ なので右の図より、

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \quad \therefore \underline{-\sqrt{2} \leq t \leq 1} //$$



$$(2) \quad t^2 = \cos^2 x - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x \quad \therefore t^2 = 1 - \sin 2x$$

$$\text{よって、} \sin 2x = 1 - t^2$$

$$\text{代入して、} \quad y = (t+1)(1-t^2) \quad \therefore \underline{y = -t^3 - t^2 + t + 1} //$$

$$(3) \quad y' = -3t^2 - 2t + 1$$

$$\therefore y' = -(3t-1)(t+1)$$

$$\therefore y' = 0 \text{ となるのは、} t = -1, \frac{1}{3}$$

右の増減表と、 $\sqrt{2}-1 < 1 < \frac{32}{27}$ より

t	$-\sqrt{2}$	\dots	-1	\dots	$\frac{1}{3}$	\dots	1
y'			$-$	0	$+$	0	$-$
y			\downarrow	0	\uparrow	$\frac{32}{27}$	\downarrow

$\sqrt{2}-1$

$$\underline{\text{最大値 } \frac{32}{27} \text{ (} t = \frac{1}{3} \text{ のとき), 最小値 } 0 \text{ (} t = \pm 1 \text{ のとき)}} //$$