2016年 スポーツ科学学部 第2問

$\boxed{2}$ 点F(0, 1)を通り，直線 $y=-1$ に接する円の中心が描く軌跡を曲線 C とする．このとき，曲線 C を表す方程式は

$$y=\frac{1}{\boxed{ウ}}x^2$$

4

となる．また，曲線 C 上に x 座標が正である点Pをとる．線分FPの長さが4となるとき，曲線 C の点Pにおける接線と曲線 C および y 軸とで囲まれる図形の面積は $\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}$ となる．

2　3

円の中心を (X, Y) とおくと，$F(0,1)$ を通ることから半径は $Y+1$

∴円の方程式は $(x-X)^2+(y-Y)^2=(Y+1)^2$

これが F を通ることより，$X^2+Y^2-2Y+1=Y^2+2Y+1$

$\therefore Y=\frac{1}{4}X^2$　$\therefore$ $\underline{C: y=\frac{1}{4}x^2}$ //

$P(p, \frac{1}{4}p^2)$，$p>0$ とすると，$FP=\sqrt{p^2+(\frac{1}{4}p^2-1)^2}=4$

$\therefore \frac{1}{16}p^4+\frac{1}{2}p^2+1=16$

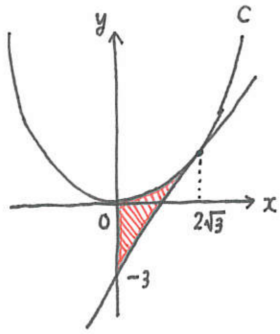
$\therefore p^4+8p^2-240=0$

$(p^2-12)(p^2+20)=0$

$\therefore p>0$ より，$p=2\sqrt{3}$

C において，$y'=\frac{1}{2}x$ より，接線は $y=\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})+\frac{1}{4}\cdot(2\sqrt{3})^2$

$\therefore y=\sqrt{3}x-3$



$\therefore S=\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4}x^2-(\sqrt{3}x-3)\,dx$

$=\left[\frac{1}{12}x^3-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+3x\right]_0^{2\sqrt{3}}$

$=\frac{1}{12}\cdot(2\sqrt{3})^3-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2+6\sqrt{3}$

$=\underline{2\sqrt{3}}$ //