

2014年 基幹理工・創造理工・先進理工 第5問

5 Oを原点とする座標平面上に

$$\text{放物線 } C_1 : y = x^2, \text{ 円 } C_2 : x^2 + (y - a)^2 = 1 \quad (a \geq 0)$$

がある。 C_2 の点 $(0, a+1)$ における接線と C_1 が2点 A, B で交わり、 $\triangle OAB$ が C_2 に外接しているとする。次の問に答えよ。

- (1) a を求めよ。
- (2) 点 (s, t) を $(-1, a), (1, a), (0, a-1)$ と異なる C_2 上の点とする。そして点 (s, t) における C_2 の接線と C_1 との2つの交点を $P(\alpha, \alpha^2), Q(\beta, \beta^2)$ とする。このとき、 $(\alpha - \beta)^2 - \alpha^2 \beta^2$ は s, t によらない定数であることを示せ。
- (3) (2)において、点 $P(\alpha, \alpha^2)$ から C_2 への2つの接線が再び C_1 と交わる点を $Q(\beta, \beta^2), R(\gamma, \gamma^2)$ とする。 $\beta + \gamma$ および $\beta\gamma$ を α を用いて表せ。
- (4) (3)の2点 Q, R に対し、直線 QR は C_2 と接することを示せ。