2014年 基幹理工・創造理工・先進理工 第5問　1枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{5}$ Oを原点とする座標平面上に

放物線 $C_1 : y = x^2$, 円 $C_2 : x^2 + (y-a)^2 = 1$ $(a \geqq 0)$

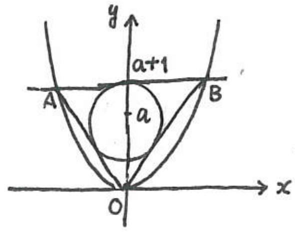
がある．C_2 の点 $(0,\ a+1)$ における接線と C_1 が2点A，Bで交わり，△OABが C_2 に外接しているとする．次の問に答えよ．

(1) a を求めよ．

(2) 点 $(s,\ t)$ を $(-1,\ a)$，$(1,\ a)$，$(0,\ a-1)$ と異なる C_2 上の点とする．そして点 $(s,\ t)$ における C_2 の接線と C_1 との2つの交点を $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ とする．このとき，$(\alpha-\beta)^2 - \alpha^2\beta^2$ は $s,\ t$ によらない定数であることを示せ．

(3) (2)において，点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$ から C_2 への2つの接線が再び C_1 と交わる点を $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$，$\mathrm{R}(\gamma,\ \gamma^2)$ とする．$\beta+\gamma$ および $\beta\gamma$ を α を用いて表せ．

(4) (3)の2点Q，Rに対し，直線QRは C_2 と接することを示せ．



(1) $y = a+1$ と $y = x^2$ の交点は $(\pm\sqrt{a+1},\ a+1)$

$B(\sqrt{a+1},\ a+1)$ とすると．直線OB：$y = \sqrt{a+1}\,x$ となる．

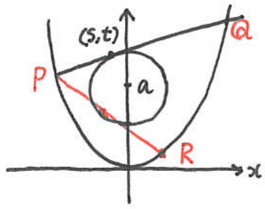
円の中心 $(0,\ a)$ と直線OBとのキョリは．点と直線のキョリ公式より

$\dfrac{|a|}{\sqrt{a+1+1}} = 1$　∴ 両辺2乗して，$a^2 - a - 2 = 0$　∴ $(a-2)(a+1) = 0$　$a \geqq 0$ より $\underline{a = 2}$ //

(2) (1)より．$C_2 : x^2 + (y-2)^2 = 1$

∴ 点 (s,t) における C_2 の接線は．$sx + (t-2)(y-2) = 1$

∴ $y = 2 + \dfrac{1-sx}{t-2}$ を $y = x^2$ に代入して．$x^2 + \dfrac{s}{t-2}x - 2 - \dfrac{1}{t-2} = 0$



解と係数の関係より，$\begin{cases} \alpha+\beta = -\dfrac{s}{t-2} \\ \alpha\beta = -2 - \dfrac{1}{t-2} \end{cases}$ …① ここで (s,t) は C_2 上の点より

$s^2 + (t-2)^2 = 1$ …②

①，②より．$(\alpha-\beta)^2 - \alpha^2\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta - (\alpha\beta)^2$

$= \dfrac{s^2}{(t-2)^2} + 8 + \dfrac{4}{t-2} - 4 - \dfrac{1}{(t-2)^2} - \dfrac{4}{t-2}$

$= 3$ (定数) ▨

(3) (2)より．$\begin{cases} (\alpha-\beta)^2 - \alpha^2\beta^2 = 3 & \cdots③ \\ (\alpha-\gamma)^2 - \alpha^2\gamma^2 = 3 & \cdots④ \end{cases}$

③－④より．$(\alpha-\beta)^2 - (\alpha-\gamma)^2 - \alpha^2(\beta^2-\gamma^2) = 0$　∴ $-2(\beta-\gamma)\alpha + (\beta+\gamma)(\beta-\gamma) - \alpha^2(\beta+\gamma)(\beta-\gamma) = 0$

∴ $(\beta-\gamma)\{-2\alpha + \beta+\gamma - \alpha^2(\beta+\gamma)\} = 0$　$\beta \neq \gamma$ より．$\underline{\beta+\gamma = \dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}}$ //

つづく

0001883546118999

早稲田大学

2014年 基幹理工・創造理工・先進理工 第5問　　2枚目／2枚

数理 石井K

5 Oを原点とする座標平面上に

放物線 $C_1 : y = x^2$，円 $C_2 : x^2 + (y-a)^2 = 1 \quad (a \geqq 0)$

がある．C_2 の点 $(0,\ a+1)$ における接線と C_1 が2点A，Bで交わり，△OABが C_2 に外接しているとする．次の問に答えよ．

(1) a を求めよ．

(2) 点 $(s,\ t)$ を $(-1,\ a)$，$(1,\ a)$，$(0,\ a-1)$ と異なる C_2 上の点とする．そして点 $(s,\ t)$ における C_2 の接線と C_1 との2つの交点を $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ とする．このとき，$(\alpha-\beta)^2 - \alpha^2\beta^2$ は s，t によらない定数であることを示せ．

(3) (2)において，点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$ から C_2 への2つの接線が再び C_1 と交わる点を $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$，$\mathrm{R}(\gamma,\ \gamma^2)$ とする．$\beta+\gamma$ および $\beta\gamma$ を α を用いて表せ．

(4) (3)の2点Q，Rに対し，直線QRは C_2 と接することを示せ．

(3)のつづき．

③＋④より　$2\alpha^2 - 2\alpha(\beta+\gamma) + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2(\beta^2+\gamma^2) = 6$

$$\therefore (1-\alpha^2)\{(\beta+\gamma)^2 - 2\beta\gamma\} - 2\alpha(\beta+\gamma) + 2\alpha^2 - 6 = 0$$

$\beta+\gamma = \dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2}$ を代入すると，$(1-\alpha^2)\left\{\dfrac{4\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} - 2\beta\gamma\right\} - \dfrac{4\alpha^2}{1-\alpha^2} + 2\alpha^2 - 6 = 0$

$\therefore -2\beta\gamma(1-\alpha^2) + 2\alpha^2 - 6 = 0 \qquad \therefore \underline{\beta\gamma = \dfrac{\alpha^2-3}{1-\alpha^2}}$ //

(4) 直線QR：$y = \dfrac{\beta^2-\gamma^2}{\beta-\gamma}(x-\beta) + \beta^2$

$\therefore$ QR：$y = (\beta+\gamma)x - \beta\gamma \qquad \therefore (\beta+\gamma)x - y - \beta\gamma = 0$

QRと $(0,2)$ とのキョリを d とおくと，

$$d = \frac{|-2-\beta\gamma|}{\sqrt{(\beta+\gamma)^2+1}}$$

$$= \frac{\left|-2-\frac{\alpha^2-3}{1-\alpha^2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right)^2+1}} \quad (\because (3)より)$$

$$= \frac{|-2(1-\alpha^2)-\alpha^2+3|}{\sqrt{4\alpha^2+(1-\alpha^2)^2}}$$

$$= \frac{|\alpha^2+1|}{\sqrt{(1+\alpha^2)^2}} = 1$$

よって直線QRは円 C_2 と接する ■