富山大学

2012年 理学部（数学）第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ $x>0$ のとき，$\tan\theta = x$ となる θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ1つ存在する．その θ を $f(x)$ と表すことにする．

(1) $f\left(\dfrac{2}{k}\right)+f\left(\dfrac{2}{l}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ を満たす自然数の組 $(k,\ l)$ を求めよ．ただし，$k \leqq l$ とする．

(2) 自然数 $m,\ n$ について，$\sin\left\{2f\left(\dfrac{m}{n}\right)\right\}$ を m と n を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\sin\left\{2f\left(\frac{m}{n}\right)\right\}$ を求めよ．

(1) $f(x)$ の定義より，

$\tan f\left(\frac{2}{k}\right)=\frac{2}{k}$ ，$\tan f\left(\frac{2}{l}\right)=\frac{2}{l}$

$\therefore \tan\left\{f\left(\frac{2}{k}\right)+f\left(\frac{2}{l}\right)\right\}=\tan\frac{\pi}{4}$ より，$\dfrac{\frac{2}{k}+\frac{2}{l}}{1-\frac{2}{k}\cdot\frac{2}{l}}=1$

$\therefore \dfrac{2k+2l}{kl-4}=1$ $\therefore kl-4=2k+2l$

$(k-2)(l-2)=8$

ここで，k, l は自然数で，$k-2 \geqq -1$，$l-2 \geqq -1$，$k-2 \leqq l-2$ より，

$(k-2,\ l-2)=(1,8),(2,4)$ $\therefore \underline{(k,l)=(3,10),(4,6)}$ //

(2) $\tan f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}$

$$\begin{aligned}\sin\left\{2f\left(\tfrac{m}{n}\right)\right\} &= 2\sin f\left(\tfrac{m}{n}\right)\cos f\left(\tfrac{m}{n}\right)\\ &= 2\tan f\left(\tfrac{m}{n}\right)\cos^2 f\left(\tfrac{m}{n}\right)\\ &= 2\tan f\left(\tfrac{m}{n}\right)\cdot\frac{1}{1+\tan^2 f\left(\tfrac{m}{n}\right)}\\ &= \frac{2\cdot\frac{m}{n}}{1+\frac{m^2}{n^2}}\\ &= \underline{\frac{2mn}{m^2+n^2}}\ /\!/\end{aligned}$$

(3) (与式) $\displaystyle =\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{2\cdot\frac{m}{n}}{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2}$

区分求積法により

$\displaystyle =\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$=\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1$ $=\underline{\log 2}$ //