0001981278108999

新潟大学

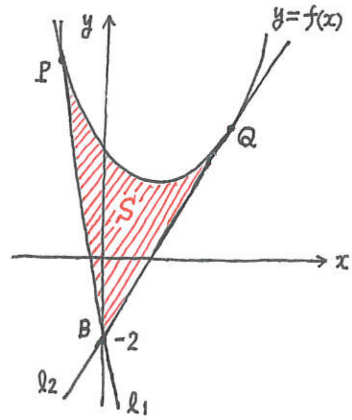
2015年 理系 第3問

$\boxed{3}$ 座標平面上の原点Oを中心とする半径1の円周 C 上の点を $\mathrm{A}(a,\ b)$ とし，$f(x)=(x-a)^2+b$ とする．点 $\mathrm{B}(0,\ -2)$ から放物線 $y=f(x)$ に引いた接線を ℓ_1，ℓ_2 とし，接点をそれぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする．ただし $p<q$ である．放物線 $y=f(x)$ と2直線 ℓ_1，ℓ_2 とで囲まれた部分の面積を S とする．次の問いに答えよ．

(1) 接線 ℓ_1 の方程式と接点Pの座標，および接線 ℓ_2 の方程式と接点Qの座標を a，b を用いて表せ．

(2) 面積 S を b を用いて表せ．

(3) 点Aが円周 C 上を動くとき，面積 S の最大値とそのときの点Aの座標 $(a,\ b)$ を求めよ．



(1) $f'(x)=2(x-a)$ より，

ℓ_1 の傾きは $2(p-a)$

$\therefore \ell_1:\ y=2(p-a)(x-p)+\underbrace{(p-a)^2+b}_{=f(p)}$

これが点 $\mathrm{B}(0,-2)$ を通ることより，

$-2=-2p^2+2ap+p^2-2ap+a^2+b$

$\therefore p^2-a^2-b-2=0$

同様に ℓ_2 についても考えると，p,q は

$x^2=a^2+b+2$ の解であり，$p<q$ より，

$p=-\sqrt{a^2+b+2}$，$q=\sqrt{a^2+b+2}$，$f(p)=2a^2+2b+2+2a\sqrt{a^2+b+2}$，$f(q)=2a^2+2b+2-2a\sqrt{a^2+b+2}$

$\therefore \mathrm{P}\left(-\sqrt{a^2+b+2},\ 2a^2+2b+2+2a\sqrt{a^2+b+2}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\sqrt{a^2+b+2},\ 2a^2+2b+2-2a\sqrt{a^2+b+2}\right)$ //

$\ell_1:\ y=-2(\sqrt{a^2+b+2}+a)x-2$，$\ell_2:\ y=2(\sqrt{a^2+b+2}-a)x-2$ //

(2) $S=\int_p^0 (x-a)^2+b+2(\sqrt{a^2+b+2}+a)x+2\ dx+\int_0^q (x-a)^2+b-2(\sqrt{a^2+b+2}-a)x+2\ dx$

$=\left[\frac{1}{3}(x-a)^3+(\sqrt{a^2+b+2}+a)x^2+(b+2)x\right]_p^0+\left[\frac{1}{3}(x-a)^3-(\sqrt{a^2+b+2}-a)x^2+(b+2)x\right]_0^q$

$=-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{3}(p-a)^3-(\sqrt{a^2+b+2}+a)p^2-(b+2)p+\frac{1}{3}(q-a)^3-(\sqrt{a^2+b+2}-a)q^2+(b+2)q+\frac{1}{3}a^3$

$=\frac{2}{3}(a^2+b+2)^{\frac{3}{2}}$

$\mathrm{A}(a,b)$ は単位円周上にあるので，$a^2+b^2=1$ $\therefore a^2=1-b^2$

$\therefore S=\frac{2}{3}(-b^2+b+3)^{\frac{3}{2}}$ //

(3) $-b^2+b+3=-(b-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}$ で，$-1\leqq b\leqq 1$ より，S の最大値は $\frac{13\sqrt{13}}{12}$ //

そのとき，$\mathrm{A}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ //