自治医科大学

2010年 第5問

数理 石井K

5 $\log_2 x + a + c\log_x 2 = 0$ の2つの解は $\frac{1}{4}$, 8であり, $\log_2 x + b + d\log_x 2 = 0$ の2つの解は $\frac{1}{2}$, 4となる. $\log_2 x + b + c\log_x 2 = 0$ の2つの解のうち, 大きいほうの解の値を求めよ. ただし, a, b, c, d は実数とする.

$\log_2 \frac{1}{4} + a + c\log_{\frac{1}{4}} 2 = 0 \quad \therefore -2 + a + c \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 \frac{1}{4}} = 0 \quad \therefore a - \frac{1}{2}c = 2 \cdots ①$

$\log_2 8 + a + c\log_8 2 = 0 \quad \therefore 3 + a + c \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 8} = 0 \quad \therefore a + \frac{1}{3}c = -3 \cdots ②$

② − ① より, $\frac{5}{6}c = -5 \quad \therefore c = -6,\ a = -1$

$\log_2 \frac{1}{2} + b + d\log_{\frac{1}{2}} 2 = 0 \quad \therefore -1 + b + d \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 \frac{1}{2}} = 0 \quad \therefore b - d = 1 \cdots ③$

$\log_2 4 + b + d\log_4 2 = 0 \quad \therefore 2 + b + d \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 4} = 0 \quad \therefore b + \frac{1}{2}d = -2 \cdots ④$

④ − ③ より, $\frac{3}{2}d = -3 \quad \therefore d = -2,\ b = -1$

$\therefore \log_2 x - 1 - 6 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = 0$

$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 6 = 0$

$\therefore (\log_2 x - 3)(\log_2 x + 2) = 0$

$\therefore \log_2 x = -2,\ 3$

$\therefore x = -\frac{1}{4},\ 8$

∴ 大きい方は $x = 8$