2010年 第5問

$\boxed{5}$ 各項が正の実数である数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = 1$ と関係式

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{a_n + a_{n+1}}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたしている．次の問いに答えよ．

(1) $a_n \geqq \sqrt{n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ．

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \leqq \frac{2}{3}(n^{\frac{3}{2}} - 1)$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を示せ．

(3) $a_n \leqq \dfrac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{2}n - \dfrac{1}{6}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ．