



2015年工学部第1問

数理
石井K

1 次の問いに答えよ。

(1) 定積分 $\int_1^3 (x-1)(x-2)(x-3) dx$ を求めよ。

(2) 方程式 $|x^2 - 3| = 2x$ を解け。

(3) a を 1 でない自然数とする。不等式 $(\log_a x)^2 - \log_a x^3 + 2 < 0$ を満たす自然数 x が 1 つだけ存在するとき、 a の値を求めよ。

(1) (与式) $= \int_1^3 \{(x-2)+1\}(x-2)\{(x-2)-1\} dx$

$$= \int_1^3 (x-2)^3 - (x-2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}(x-2)^4 - \frac{1}{2}(x-2)^2 \right]_1^3$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= \underline{0}$$

別) x 軸方向に -2 平行移動して。

(与式) $= \int_{-1}^1 (x+1)x(x-1) dx$

$$= \int_{-1}^1 \underbrace{x^3 - x}_{\text{奇関数}} dx$$

$$= 0$$

(2) (i) $x^2 - 3 \geq 0$ すなわち $x < -\sqrt{3}$, $\sqrt{3} < x$ のとき。

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\therefore (x-3)(x+1) = 0 \quad \therefore x = -1, 3$$

場合分けの条件より, $x = 3$ (ii) $x^2 - 3 < 0$ すなわち $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ のとき

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\therefore (x+3)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -3, 1$$

場合分けの条件より, $x = 1$ (i), (ii) より, $\underline{x = 1, 3}$ 

$$a^2 - a \leq 2 \text{ より } (a-2)(a+1) \leq 0$$

$$\therefore a > 1 \text{ より } 1 < a \leq 2$$

 $\therefore a$: 自然数より

$$\underline{a = 2}$$

(3) $t = \log_a x$ とおくと, $t^2 - 3t + 2 < 0$

$$\therefore (t-2)(t-1) < 0 \quad \therefore 1 < t < 2$$

$$\therefore 1 < \log_a x < 2 \Leftrightarrow a < x < a^2 \quad (\because \text{底 } a > 1)$$