



2014年工学部第4問

4  $\triangle A_1B_1C$  は、 $B_1C = \sqrt{2}$ 、 $\angle B_1A_1C = \frac{\pi}{2}$ 、 $\angle A_1B_1C = \theta$  ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) を満たす。下図のように、点  $A_1$  から辺  $B_1C$  に下ろした垂線を  $A_1B_2$  とし、点  $B_2$  から辺  $A_1C$  に下ろした垂線を  $B_2A_2$  とする。次に、点  $A_2$  から辺  $B_1C$  に下ろした垂線を  $A_2B_3$  とし、点  $B_3$  から辺  $A_1C$  に下ろした垂線を  $B_3A_3$  とする。この操作を繰り返し、辺  $A_1C$  上に点  $A_2, A_3, A_4, \dots$  を、辺  $B_1C$  上に点  $B_2, B_3, B_4, \dots$  を定める。自然数  $n$  に対し、 $\triangle A_nB_nB_{n+1}$  の面積を  $S_n$  とし、これらの面積の総和を  $T = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$  とする。このとき、次の問いに答えよ。



- (1)  $S_1 = \sin \theta \cos^3 \theta$ 、 $S_2 = \sin^5 \theta \cos^3 \theta$  を示し、一般項  $S_n$  を求めよ。
- (2)  $T = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta}$  を示せ。
- (3)  $\theta$  が  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき、 $T$  の最大値を求めよ。