

2013年 医学部 第3問

3 実数  $a$  に対し, 行列  $X(a)$  を

$$X(a) = \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} 2a^2+1 & -a \\ -a & a^2+2 \end{pmatrix}$$

と定める.

(1) ベクトル  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  を考える. ベクトル  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ ,  $X(a)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  の大きさをそれぞれ  $l_0$ ,  $l_1$  とおく. このとき

$$l_0 \leq l_1$$

を示せ. ただしベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  の大きさは  $\sqrt{x^2+y^2}$  のことである.

(2) (1) で  $l_0 = l_1$  となるとき,  $X(a)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  を示せ.

(3)  $a, b$  が異なる実数のとき,  $X(a)^m = X(b)^n$  となるような正の整数  $m, n$  は存在しないことを示せ.