



2015年工学部第4問

1枚目/2枚

4 次の問いに答えよ。

(1) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)とおくと、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束し、その和は $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$ であることが知られている。これを用いて、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の和を求めよ。

(2) 等式 $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$ が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$ の収束、発散について調べ、収束するときはその和を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \left(-\frac{1}{n} \cos nx\right)' dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos n\pi - \frac{\pi}{n} \cos(-n\pi) \right) + \frac{1}{n\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= -\frac{2}{n} \cos n\pi \\
 &= \frac{2}{n} \cdot (-1)^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\therefore a_n^2 = \frac{4}{n^2}$$

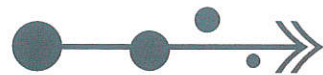
$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{2}{3} \pi^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{両辺を4で割ると, } \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}}$$

両辺の係数を比べて、
 $b = 1, a = -1, c = 1$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ (右辺)} &= \frac{ax(x+1) + b(x+1) + cx^2}{x^2(x+1)} \\
 &= \frac{(a+c)x^2 + (a+b)x + b}{x^2(x+1)}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{\underline{(a, b, c) = (-1, 1, 1)}}$$



2015年工学部第4問

2枚目/2枚



4 次の問いに答えよ。

(1) $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)とおくと、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ は収束し、その和は $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx$ であることが知られている。これを用いて、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ の和を求めよ。

(2) 等式 $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}$ が x についての恒等式となるように、定数 a, b, c の値を定めよ。

(3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$ の収束、発散について調べ、収束するときはその和を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n+1} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 &= -1 + \frac{\pi^2}{6} \\
 &= \frac{\pi^2}{6} - 1
 \end{aligned}$$