

2011年理系第2問

2 曲線 $C: y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 上の点 $P\left(p, \frac{1}{p}\right)$ における接線を l とする。接線 l と x 軸との交点を Q とする。さらに、 Q を通り x 軸に垂直な直線と曲線 C との交点を R とする。このとき、次の問いに答えよ。

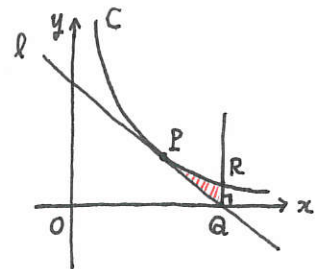
- (1) 接線 l の方程式を求めよ。
 (2) 接線 l と x 軸および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。
 (3) 曲線 C と接線 l および線分 QR とで囲まれた図形の面積を求めよ。

$$(1) y' = -\frac{1}{x^2} \text{ より, } l: y = -\frac{1}{p^2}(x-p) + \frac{1}{p} \quad \therefore l: y = -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p} //$$

$$(2) l \text{ の } y \text{ 切片は } \frac{2}{p},$$

$Q(2p, 0)$ であるから、求める面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{p} \cdot 2p = 2 //$$



(3) 求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_p^{2p} \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p}\right) dx &= \left[\log|x| + \frac{1}{2p^2}x^2 - \frac{2}{p}x \right]_p^{2p} \\ &= \log 2p + 2 - 4 - \log p - \frac{1}{2} + 2 \\ &= \log 2 - \frac{1}{2} // \end{aligned}$$