2016年 経済学部 第2問

$\boxed{2}$ 以下の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = \frac{1}{10}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{100}a_n + \frac{1}{10} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．$\{b_n\}$ は等比数列で，初項を $\dfrac{1}{10^p}$，公比を $\dfrac{1}{10^q}$ とおくと，$p = \boxed{13}$，$q = \boxed{14}$ となる．ゆえに，$\{b_n\}$ の第 n 項を

$$b_n = \frac{1}{10^{rn+s}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおくと，$r = \boxed{15}$，$s = \boxed{16}$ となる．さらに，$\{a_n\}$ の第 n 項は，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=\boxed{17}}^{n+\boxed{18}\boxed{19}} b_k = \frac{\dfrac{1}{10^t}\left(1 - \dfrac{1}{10^{un}}\right)}{1 - \dfrac{1}{10^v}} \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

と求められる．ここで，$t = \boxed{20}$，$u = \boxed{21}$，$v = \boxed{22}$ である．

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{2k}a_k a_{k+1}}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく．関係式

$$\frac{b_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{\boxed{23}\boxed{24}}{a_k} + \frac{\boxed{25}\boxed{26}}{a_{k+1}} \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を用いて計算すると，

$$S_n = \frac{10^w\left(1 - \dfrac{1}{10^{xn}}\right)}{1 - \dfrac{1}{10^{yn+z}}}$$

となる．ここで，$w = \boxed{27}$，$x = \boxed{28}$，$y = \boxed{29}$，$z = \boxed{30}$ である．

(3) $(100^{n+1} - 1)S_n$ は $\boxed{31}\,n + \boxed{32}\boxed{33}$ 桁の整数になる．