0001905454908999

同志社大学

2014年 文学部・経済学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ p, q を実数とする t に関する2次方程式 $t^2+pt+q=0$ の解が虚数になるとき，次の問いに答えよ．

(1) 解の1つを α とするとき，$\alpha(2-\alpha)$ が実数でありかつ $\alpha(2-\alpha)<2$ となるための p, q の条件を求めよ．

(2) 虚部が負の解を β とする．(1)の条件のもとで $\beta(1-\beta)$ の実部を y，虚部を x として，座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡を求めよ．

(3) (2)で求めた軌跡上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と定点 $\mathrm{Q}(0,\ 1)$ との距離が最小となるときの点Pの座標と距離PQを求めよ．

(1) 判別式をDとおくと．

$D=p^2-4q<0 \quad \therefore\ p^2<4q \quad \cdots①$

また，$\alpha(2-\alpha)=-\alpha^2+2\alpha$

ここで，$\alpha^2+p\alpha+q=0$ より．$\alpha(2-\alpha)=-(-p\alpha-q)+2\alpha$

$=(p+2)\alpha+q$

$\therefore$ p, q：実数，α：虚数 より．$p=-2$，$q<2 \quad \cdots②$

①，② より．$q>1$ 　以上より，$p=-2$，$1<q<2$ //

(2) (1)より．$t^2-2t+q=0 \quad (1<q<2)$ なので，

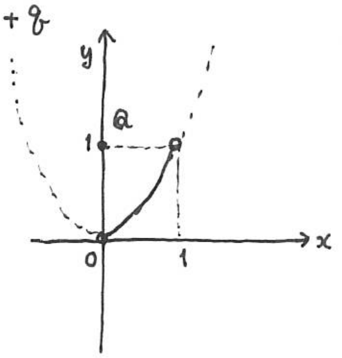
$\beta=\dfrac{2-\sqrt{4-4q}}{2}=1-\sqrt{1-q} \quad (1<q<2)$

$\therefore\ \beta(1-\beta)=\sqrt{1-q}\,(1-\sqrt{1-q})=\sqrt{1-q}-1+q$

$y=q-1$，$x=\sqrt{q-1} \quad (1<q<2)$

$\therefore\ y=x^2 \quad (0<x<1)$

求める軌跡は放物線の一部 $y=x^2\ (0<x<1)$ //



(3) $PQ^2=(x-0)^2+(x^2-1)^2=x^4-x^2+1$

$\therefore\ PQ^2=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$\therefore\ x>0$ より．$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき 最小値 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，これは $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ のとき．//