0000137272689999

弘前大学

2010年第8問

数理 石井K

$\boxed{8}$ 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1 \{x(1-x)\}^{\frac{3}{2}}\,dx$$

見た目より．ずいぶん難しいことに注意

$$\int_0^1 \{x(1-x)\}^{\frac{3}{2}}dx = \int_0^1 \left\{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}^{\frac{3}{2}}dx$$

ここで，$t = x - \frac{1}{2}$ とおいて置換積分すると，

$dt = dx$ ，

x	$0 \to 1$
t	$-\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$

$$\therefore (与式) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{-t^2+\frac{1}{4}\right\}^{\frac{3}{2}} dt$$

ここで，さらに，$t = \frac{1}{2}\sin\theta$ とおいて置換積分すると，

$dt = \frac{1}{2}\cos\theta\, d\theta$ ，

t	$-\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$
θ	$-\frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2}$

$$\therefore (与式) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{1}{4}(1-\sin^2\theta)\right\}^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}\cdot\cos^3\theta\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{64}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{64}\left[\frac{3}{2}\theta + \sin 2\theta + \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \underline{\frac{3}{128}\pi}\ /\!/$$