0001866183318999

京都工芸繊維大学

2014年 第1問

数理 石井K

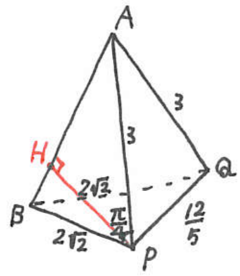
$\boxed{1}$ 四面体 ABPQ は $AP = AQ = 3$，$BP = BQ = 2\sqrt{2}$，$PQ = \dfrac{12}{5}$，$\angle APB = \dfrac{\pi}{4}$ を満たすとする．点 P から直線 AB に下ろした垂線を PH とする．

(1) 線分 PH の長さを求めよ．

(2) $\angle PHQ$ の大きさを θ とする．$\sin\theta$ の値を求めよ．

(3) 2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{PQ}$ は垂直であることを証明せよ．

(4) 四面体 ABPQ の体積を求めよ．



(1) △ABP において余弦定理より

$$AB^2 = 3^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}$$
$$= 17 - 12$$
$$= 5$$

$\therefore AB = \sqrt{5}$ $\quad \therefore \triangle ABP = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot PH$ $\quad \therefore \underline{PH = \frac{6\sqrt{5}}{5}}$ //

(2) 図形の対称性より．$QH = PH = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{2\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2}{2\cdot\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$ $\quad \therefore \underline{\sin\theta = \frac{4}{5}}$ //

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP})$

$$= \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$$

図形の対称性より（$\triangle ABP \equiv \triangle ABQ$ より）$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ}$

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0$ となり $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{PQ}$ は垂直である ■

(4) 2つの四面体 BPQH と APQH の体積の和より

$$V = \frac{1}{3}\times\triangle PQH\times BH + \frac{1}{3}\times\triangle PQH\times AH$$
$$= \frac{1}{3}\times\triangle PQH\times AB$$
$$= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2\cdot\frac{4}{5}\cdot\sqrt{5}$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{36}{5}\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5}$$
$$= \underline{\frac{24\sqrt{5}}{25}}$$ //