首都大学東京

2010年第2問

$\boxed{2}$ 以下の問いに答えなさい．

(1) s を $0 \leqq s \leqq \sqrt{2}$ を満たす実数とする．直線 $y = x$ と直線 $y = -x + \sqrt{2}s$ の交点をPとする．直線 $y = -x + \sqrt{2}s$ と曲線 $y = -x^2 + 2x$ の交点で x 座標が1以下である点をQとし，Qの x 座標を t とする．このとき，点Pと点Qの距離および s を，t を用いて表しなさい．

(2) 直線 $y = x$ と曲線 $y = -x^2 + 2x$ で囲まれた図形を直線 $y = x$ のまわりに回転させてできる立体の体積を求めなさい．

(1) $x = -x + \sqrt{2}s$ を解いて $x = \frac{\sqrt{2}}{2}s$ $\therefore P\left(\frac{\sqrt{2}s}{2}, \frac{\sqrt{2}s}{2}\right)$

$-x + \sqrt{2}s = -x^2 + 2x$ より $x^2 - 3x + \sqrt{2}s = 0$ $\therefore t^2 - 3t + \sqrt{2}s = 0$

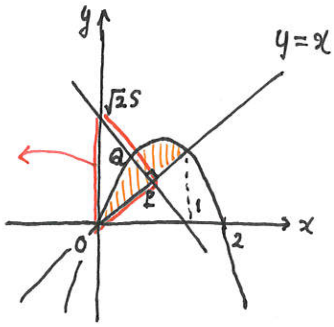
s について解くと．$\underline{s = \frac{-t^2+3t}{\sqrt{2}}}$ // このとき $Q(t, -t^2+2t)$

よって点Pと点Qの距離を d とおくと．$d = \sqrt{2} \cdot \left|t - \frac{\sqrt{2}}{2}s\right|$ $\cdots$ ①

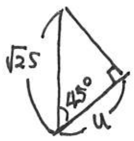
ここで，$\left|t - \frac{\sqrt{2}}{2}s\right| = \left|\frac{t(t-1)}{2}\right|$

$0 \leqq s \leqq \sqrt{2}$ かつ $t \leqq 1 \iff 0 \leqq t \leqq 1$ より $\left|\frac{t(t-1)}{2}\right| = -\frac{t(t-1)}{2}$

$\therefore$ ①より $\underline{d = \frac{t(1-t)}{\sqrt{2}}}$ //



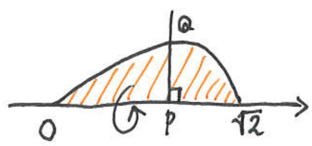
(2) 直線OPを回転軸と考える．$0 \leqq t \leqq 1$



$\therefore V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} PQ^2\,du$ ただし，$u = s$

$= \pi\int_0^{\sqrt{2}} \left\{\frac{t(1-t)}{\sqrt{2}}\right\}^2 du$ ， $du = \frac{-2t+3}{\sqrt{2}}\,dt$

$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^2(1-t)^2(-2t+3)\,dt$



$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1 -2t^5 + 7t^4 - 8t^3 + 3t^2\,dt$

$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{3}t^6 + \frac{7}{5}t^5 - 2t^4 + t^3\right]_0^1 = \underline{\frac{\sqrt{2}\pi}{60}}$ //