山形大学

2014年 農学部 第4問

$\boxed{4}$ 関数

$$f(x) = 3^{3x-1} + 3^{-3x-1} - 3^{2x} - 3^{-2x} - 2\cdot3^{x} - 2\cdot3^{-x} - 2$$

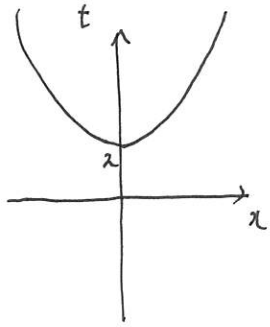
と $t = 3^x + 3^{-x}$ について次の問に答えよ.

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ.

(2) $3^{3x} + 3^{-3x}$ と $3^{2x} + 3^{-2x}$ を t の式で表し, $f(x)$ を t の式で表せ.

(3) $f(x)$ の最小値を求めよ.

(4) a を実数とするとき, $f(x) = a$ をみたす x の個数を求めよ.



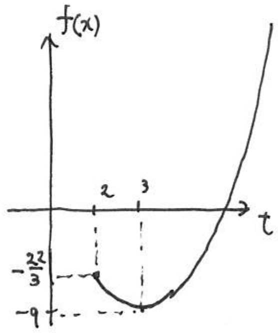
(1) $3^x > 0$, $3^{-x} > 0$ より. (相加平均) ≧ (相乗平均) なので

$$t = 3^x + 3^{-x} \geqq 2\sqrt{3^x \cdot 3^{-x}} = 2 \qquad \therefore \underline{t \geqq 2}$$

(2)
$$3^{3x} + 3^{-3x} = (3^x + 3^{-x})(3^{2x} - 1 + 3^{-2x})$$
$$= t\cdot\{t^2 - 2 - 1\}$$
$$= \underline{t^3 - 3t}$$

$$3^{2x} + 3^{-2x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = \underline{t^2 - 2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}(t^3 - 3t) - (t^2 - 2) - 2t - 2$$
$$= \underline{\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t}$$



(3)
$$\frac{d}{dt}f(x) = t^2 - 2t - 3$$
$$= (t-3)(t+1)$$

t	2	…	3	…	(∞)
$\frac{d}{dt}f$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{22}{3}$	↘	-9	↗	(∞)

極小

$3^x + 3^{-x} = 3$

$\Leftrightarrow (3^x)^2 - 3\cdot3^x + 1 = 0$

$\therefore 3^x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$

$x = \log_3 \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$\therefore \underline{f(x) \text{ の最小値は } -9 \ \left(x = \log_3 \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)}$$

(4) $3^x + 3^{-x}$: 偶関数なので, $x = 0$ $(t = 2)$ 以外では,

$f(x) = a$ の t の解の2倍 x の解がある.

$\therefore$
$$\begin{cases} a = -9,\ a > -\frac{22}{3} \text{ のとき } 2\text{個} \\ a = -\frac{22}{3} \text{ のとき } 3\text{個},\ -9 < a < -\frac{22}{3} \text{ のとき } 4\text{個},\ a < -9 \text{ のとき } 0\text{個} \end{cases}$$