2016年 人間科学学部（文系） 第3問

数理 石井K

3 曲線 $C: y=x^2$ 上の点をPとする．ただしPの x 座標は正とする．点Pにおける C の接線を ℓ，点Pを通り ℓ に垂直な直線を m とする．直線 m と曲線 C がPとは異なる交点をもつとき，その点をQとする．点Pが曲線 C 上を動くとき，以下の問に答えよ．

(1) 点Qにおける C の接線を n とし，ℓ と n との交点をRとする．点Rの座標を $(p,\ q)$ とするとき

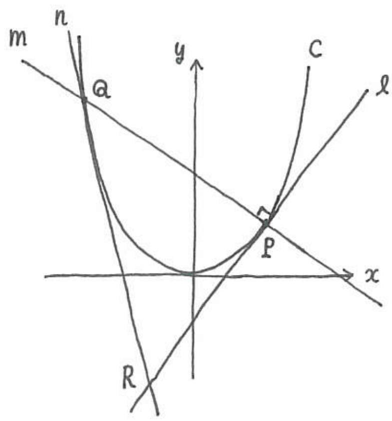
$$q=\frac{\overset{-1}{\boxed{キ}}}{\underset{16}{\boxed{ク}}\,p^2}+\frac{\boxed{ケ}\;-1}{\boxed{コ}\;2}$$

が成り立つ．

(2) 曲線 C と線分PQで囲まれる部分の面積の最小値は $\dfrac{\boxed{サ}\;4}{\boxed{シ}\;3}$ であり，そのときの点P，Qの座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{\boxed{ス}\;1}{\boxed{セ}\;2},\ \frac{\boxed{ソ}\;1}{\boxed{タ}\;4}\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{\overset{-3}{\boxed{チ}}}{\underset{2}{\boxed{ツ}}},\ \frac{\overset{9}{\boxed{テ}}}{\underset{4}{\boxed{ト}}}\right)$$

である．



(1) $P(t, t^2)$ $(t>0)$ とおくと，$y'=2x$ より

ℓ の傾きは $2t$

$\therefore\ m: y=-\frac{1}{2t}(x-t)+t^2$

$\therefore\ m: y=-\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}+t^2$

$x^2+\frac{1}{2t}x-\frac{1}{2}-t^2=0$

解と係数の関係より，Qの x 座標を s とおくと，$s+t=-\frac{1}{2t}$ $\quad\therefore\ s=-t-\frac{1}{2t}$

$\therefore\ n: y=\left(-2t-\frac{1}{t}\right)\left(x+t+\frac{1}{2t}\right)+\left(-t-\frac{1}{2t}\right)^2$

$n: y=\left(-2t-\frac{1}{t}\right)x-2t^2-1-1-\frac{1}{2t^2}+t^2+\frac{1}{4t^2}+1$

$\therefore\ n: y=\left(-2t-\frac{1}{t}\right)x-t^2-\frac{1}{4t^2}-1\quad\cdots①$

$\ell: y=2tx-t^2\quad\cdots②$

①，②より．$p=-\frac{1}{4t}$，$q=-\frac{1}{2}-t^2$

$\therefore$ t を消去して，$\underline{q=-\frac{1}{16p^2}-\frac{1}{2}}$ //

(2) $S=\int_{-t-\frac{1}{2t}}^{t}-(x-t)\left\{x-\left(-t-\frac{1}{2t}\right)\right\}dx=\frac{1}{6}\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^3$

$\frac{1}{6}$ 公式

相加・相乗平均の関係より．

$2t+\frac{1}{2t}\geqq 2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{2t}}=2$

等号成立は $t=\frac{1}{2}$ のとき．

$\therefore\ S\geqq\frac{1}{6}\cdot 2^3$

$\therefore$ 最小値 $\frac{4}{3}$ //

$\underline{P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right),\ Q\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)}$ //