

2010年 人間科学学部（理系） 第5問

5 四面体 $OABC$ において、線分 OA を $2:1$ に内分する点を P 、線分 OB を $3:1$ に内分する点を Q 、線分 BC を $4:1$ に内分する点を R とする。この四面体を 3 点 P, Q, R を通る平面で切り、この平面が線分 AC と交わる点を S とするとき、線分の長さの比 $AS:SC$ を求めることを考えよう。

点 S は 3 点 P, Q, R を通る平面上にあるから、定数 s, t, u を用いて、

$$\vec{OS} = s\vec{OP} + t\vec{OQ} + u\vec{OR} \quad (s + t + u = 1)$$

と書くことができる。ここで、 $\vec{OR} = \frac{\boxed{\text{ス}}\vec{OB} + \boxed{\text{セ}}\vec{OC}}{\boxed{\text{ソ}}}$ であるから、 \vec{OS} は $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ それぞれの定数倍の和として表すことができる。そこで、 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ の係数をそれぞれ定数 s', t', u' とおくことにより

$$\vec{OS} = s'\vec{OA} + t'\vec{OB} + u'\vec{OC} \quad (18s' + 16t' + 11u' = \boxed{\text{タ}})$$

と書くことができる。ところが、点 S は線分 AC 上にあることから、 s', t', u' を求めることができ、 $AS:SC = \boxed{\text{チ}} : \boxed{\text{ツ}}$ であることがわかる。ただし、 $\boxed{\text{ソ}}, \boxed{\text{チ}}, \boxed{\text{ツ}}$ はできる限り小さい自然数で答えること。