早稲田大学

2014年 教育 第4問

$\boxed{4}$ 2個以上の正の整数を要素とする有限集合を A とする．

A のどの2数も一方が他方を割り切るとき A は良い集合であるといい，A のどの2数も互いに他を割り切らないとき A は悪い集合であるという．

また，A の良い部分集合の要素の個数の最大値，すなわち，

$$\max\left\{n(B) \mid B \subset A,\ n(B) \geqq 2 \text{ かつ } B \text{ は良い集合}\right\}$$

を A の最良数と定義し，A の悪い部分集合の要素の個数の最大値，すなわち，

$$\max\left\{n(B) \mid B \subset A,\ n(B) \geqq 2 \text{ かつ } B \text{ は悪い集合}\right\}$$

を A の最悪数と定義する．

たとえば，$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 14,\ 15,\ 77,\ 154,\ 225,\ 231,\ 308\}$ のとき，A の良い部分集合は $\{7,\ 77,\ 231\}$，$\{7,\ 14,\ 154,\ 308\}$，$\{11,\ 77,\ 154,\ 308\}$ などであり，A の最良数は4である．また，A の悪い部分集合は $\{231,\ 308\}$，$\{14,\ 15,\ 77\}$，$\{2,\ 7,\ 11,\ 15\}$，$\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$ などであり，A の最悪数は5である．

k を2以上の整数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $n(A)=k^2$ で，かつ最良数も最悪数も k である集合 A が存在することを証明せよ．

(2) $n(A) \geqq k^2+1$ ならば，A の最良数または A の最悪数のどちらかは $k+1$ 以上であることを証明せよ．

(3) 要素数が2014で，かつ最良数と最悪数が等しいような集合，すなわち，

$$n(A)=2014 \quad \text{かつ} \quad (A\text{ の最良数})=(A\text{ の最悪数})$$

を満たす集合 A を考える．このような集合たちの中で最良数が最小となる集合の例を挙げよ．