

2015年教育第4問

4 座標平面の第1象限に曲線  $C_0: y = \frac{1}{x} + x$  ( $x > 0$ ) と曲線  $C: y = \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) がある。  $C_0$  上の点  $(a, \frac{1}{a} + a)$  における  $C_0$  の接線を  $l$  とする。このとき、  $l$  は曲線  $C$  と2点で交わっているとす。

- (1) このように、接線  $l$  と曲線  $C$  が2点で交わる  $a$  の範囲を求めよ。
- (2) 接線  $l$  と曲線  $C$  とで囲まれた部分の面積を求めよ。
- (3) 上の(2)で求めた面積を  $S(a)$  とするとき、

$$\frac{a^3}{1-a^2} < S(a) < \frac{2a}{1-a^2}$$

が成り立つことを示せ。