2012年 理系 第3問

$\boxed{3}$ 数列 $\{c_n\}$ を次のように定義する．

$$c_1 = 1,\ \ c_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3}\left(c_n + \frac{1}{4^{n+1}}\right) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問に答えよ．

(1) $n \geqq 2$ のとき，$a_n = 1 + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4^n}$ とする．このとき，$c_n = \dfrac{1}{3^{n-1}} + \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{3^{n-i}}$ $(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} c_n$ を求めよ．