



2015年 医学部 第2問

2 ひし形の紙がある (図1). 点線で半分に折ると正三角形になった (図2). これを少し開いて机の上に立てると, 三角錐の形になる (図3). その高さを次のようにして求めたい.

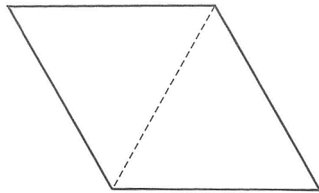


図1

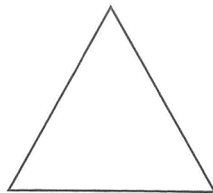


図2

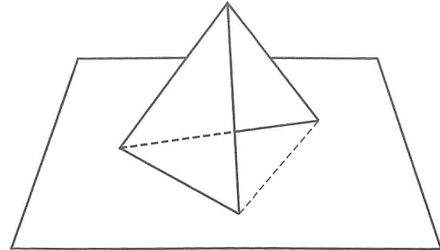


図3

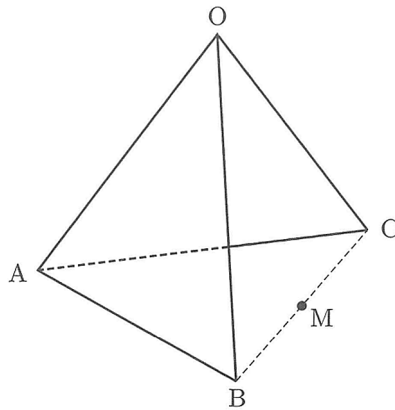


図4 (図3の拡大図)

図4において, 2つの正三角形 OAB と OAC の1辺の長さを1とする. 点Oと平面 ABC の距離が, 三角錐 OABC の高さになる. 空間ベクトルを利用してこの高さを求める.  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ ,  $\vec{OC} = \vec{c}$ ,  $\angle BOC = \theta$  とおき, 線分 BC の中点を M とする. 以下の問いに答えよ.

- (1)  $\vec{OM}$  と  $\vec{AM}$  を,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  を用いて表せ.
- (2) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  と  $\vec{a} \cdot \vec{c}$  の値を求めよ. また,  $|\vec{b} + \vec{c}|^2$  の値を  $\cos \theta$  を用いて表せ.
- (3) 実数  $t$  に対して  $\vec{OH} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OM}$  とおくと, 点 H は直線 AM 上にある. このとき,  $\vec{OH} \perp \vec{BC}$  が成り立つことを示せ. さらに, H が  $\vec{OH} \perp \vec{AM}$  を満たす点であるとき,  $t$  の値を  $\cos \theta$  を用いて表せ.
- (4) 三角錐 OABC の高さを  $h$  とする.  $h$  を  $\cos \theta$  を用いて表せ. さらに,  $\vec{OM} \perp \vec{AM}$  が成り立つとき,  $\theta$  と  $h$  の値を求めよ.