愛知教育大学

2015年 第5問

5 nを自然数とするとき，等式

$$1\cdot(2n-1)+2\cdot(2n-3)+3\cdot(2n-5)+\cdots+(n-1)\cdot 3+n\cdot 1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \cdots (*)$$

が成り立つことを，数学的帰納法により証明せよ．

数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$(*)$ の (左辺) $=1\cdot 1=1$，(右辺) $=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき $(*)$ が成り立つと仮定する．このとき．

$$1\cdot(2k-1)+2\cdot(2k-3)+3\cdot(2k-5)+\cdots+(k-1)\cdot 3+k\cdot 1=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

これを $\sum$ を使って表すと，

$$\sum_{i=1}^{k} i\cdot\{2k-(2i-1)\}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

両辺に $\sum_{i=1}^{k}(2i)$ を加えて，

$$\sum_{i=1}^{k} i\{2k-(2i-1)\}+2i=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\sum_{i=1}^{k}(2i)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{k} i\{2(k+1)-(2i-1)\}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+k(k+1)$$

両辺に，$(k+1)\cdot 1$ を加えて，

$$\sum_{i=1}^{k+1} i\{2(k+1)-(2i-1)\}=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+k(k+1)+k+1$$

$$=\frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$$

$\therefore$ $n=k+1$ のとき成り立つ．

(i), (ii) より，すべての自然数 n に対して，$(*)$ が成り立つ ▨