0000006453999999

早稲田大学

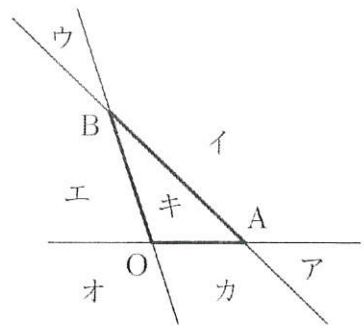
2011年 基幹理工・創造理工・先進理工 第5問　　1枚目／2枚

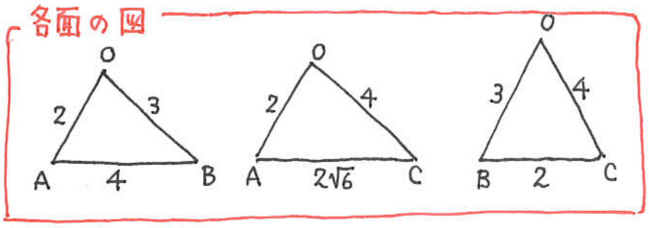
$\boxed{5}$ 四面体OABCにおいて OA $=$ BC $= 2$, OB $= 3$, OC $=$ AB $= 4$, AC $= 2\sqrt{6}$ である．また，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) △OABを含む平面を H とする．H 上の点Pで直線PCと H が直交するものをとる．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\vec{a} + y\vec{b}$ となる x, y を求めよ．

(3) 平面 H を直線OA，AB，BOで右図のように7つの領域ア，イ，ウ，エ，オ，カ，キにわける．点Pはどの領域に入るか答えよ．





(4) 辺ABで△ABCと△OABのなす角は鋭角になるか，直角になるか，それとも鈍角になるかを判定せよ．ただし，1辺を共有する2つの三角形のなす角とは，共有する辺に直交する平面での2つの三角形の切り口のなす角のことである．

(1) 余弦定理より．$\cos\angle AOB = \dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 3} = -\dfrac{1}{4}$　∴ $\underline{\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 3\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{3}{2}}$ //

同様にして．$\underline{\vec{a}\cdot\vec{c} = -2,\ \vec{b}\cdot\vec{c} = \dfrac{21}{2}}$ //

(2) $PC \perp H \iff PC \perp OA$ かつ $PC \perp OB$

∴ $\overrightarrow{PC} = -x\vec{a} - y\vec{b} + \vec{c}$ であるから(1)より．

$\overrightarrow{PC}\cdot\vec{a} = -x\cdot 4 - y\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right) - 2$　∴ $-4x + \dfrac{3}{2}y - 2 = 0$ …①

$\overrightarrow{PC}\cdot\vec{b} = \dfrac{3}{2}x - 9y + \dfrac{21}{2}$　∴ $\dfrac{3}{2}x - 9y + \dfrac{21}{2} = 0$ …②

①，②より．$\underline{x = -\dfrac{1}{15},\ y = \dfrac{52}{45}}$ //

(3) (2)より．

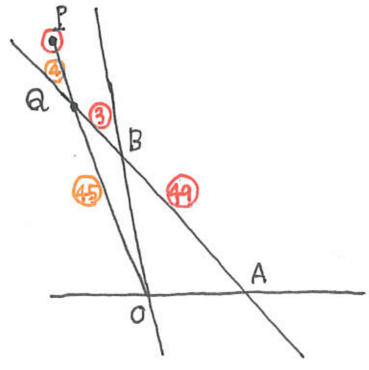
$\overrightarrow{OP} = -\dfrac{1}{15}\vec{a} + \dfrac{52}{45}\vec{b}$

$= \dfrac{49}{45}\left(\dfrac{-3\vec{a}+52\vec{b}}{52+(-3)}\right)$

∴ 線分ABを52：3の比に外分する点をQとおくと，

$\overrightarrow{OP} = \dfrac{49}{45}\overrightarrow{OQ}$ である．

∴右の図より．$\underline{\text{ウの領域にはいる}}$ //



0000006453999999

早稲田大学

2011年 基幹理工・創造理工・先進理工 第5問　2枚目／2枚

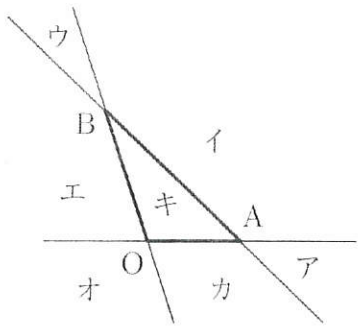
数理
石井K

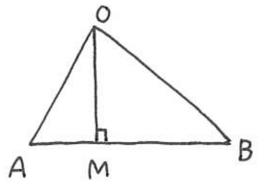
$\boxed{5}$ 四面体OABCにおいてOA $=$ BC $= 2$，OB $= 3$，OC $=$ AB $= 4$，AC $= 2\sqrt{6}$ である．また，$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．以下の問に答えよ．

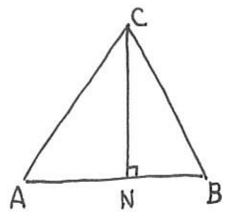
(1) 内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}$ を求めよ．

(2) △OABを含む平面を H とする．H 上の点Pで直線PCと H が直交するものをとる．このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b}$ となる x，y を求めよ．

(3) 平面 H を直線OA，AB，BOで右図のように7つの領域ア，イ，ウ，エ，オ，カ，キにわける．点Pはどの領域に入るか答えよ．







(4) 辺ABで△ABCと△OABのなす角は鋭角になるか，直角になるか，それとも鈍角になるかを判定せよ．ただし，1辺を共有する2つの三角形のなす角とは，共有する辺に直交する平面での2つの三角形の切り口のなす角のことである．

(4) Oから辺ABに下ろした垂線の足をM，Cから辺ABに下ろした垂線の足をNとする．

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = s\overrightarrow{a} + (1-s)\overrightarrow{b}$ と表すと．OM $\perp$ AB より．

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}) = -s|\overrightarrow{a}|^2 + (2s-1)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + (1-s)|\overrightarrow{b}|^2 = -16s + \frac{21}{2}$

$\therefore -16s + \frac{21}{2} = 0 \quad \therefore s = \frac{21}{32}$

$\overrightarrow{\mathrm{CN}} = t\overrightarrow{\mathrm{CA}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{CB}} = t\overrightarrow{a} + (1-t)\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}$ と表すと．CN $\perp$ AB より．

$\overrightarrow{\mathrm{CN}}\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}) = -t|\overrightarrow{a}|^2 + (2t-1)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + (1-t)|\overrightarrow{b}|^2 - \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}$

$= -16t - 2$

$\therefore -16t - 2 = 0$ より． $t = -\frac{1}{8}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}} = \left(\frac{21}{32}\overrightarrow{a} + \frac{11}{32}\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(-\frac{1}{8}\overrightarrow{a} + \frac{9}{8}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right)$

$= \frac{1}{256}\left(-21\cdot 4 + 189\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - 168\cdot(-2) - 11\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) + 99\cdot 9 - 88\cdot\frac{21}{2}\right)$

$= -\frac{3}{16}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}} < 0$ となり．なす角は鈍角 //