

2012年 商学部 第3問

3 平面上に点 $O, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$ がある. ただし, 同じ点があってもよい. また, 平面上の点 P に対して,

$$f(P) = \sum_{i=1}^{100} |\overrightarrow{PA_i}|^2$$

とする. また, $f(P)$ の最小値を m とし, 平面上の点 C は $f(C) = m$ を満たすとする. このとき, 次の設問に答えよ.

(1) $\vec{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, 100$) とするとき, \overrightarrow{OC} を \vec{a}_i を用いて表せ.

(2) 次の条件

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{100} \left(\sum_{j=1}^{100} |\overrightarrow{A_i A_j}|^2 \right) = \sum_{j=1}^{100} |\overrightarrow{A_1 A_j}|^2 + \sum_{j=1}^{100} |\overrightarrow{A_2 A_j}|^2 + \dots + \sum_{j=1}^{100} |\overrightarrow{A_{100} A_j}|^2 = 4000$$

が成立しているときの m の値を求めよ.

(3) (2) における条件 (*) が成立しているとき, 集合

$$\left\{ A_i \mid |\overrightarrow{CA_i}| \geq 2, 1 \leq i \leq 100, i \text{ は整数} \right\}$$

の要素の個数の最大値を求めよ.