



2014年 理学部 (数学・情報数理) 第6問

6 自然数  $n$  に対して, 和

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える.

(1) 各自然数  $n$  に対して  $2^k \leq n$  をみたす最大の整数  $k$  を  $f(n)$  で表すとき, 2つの奇数  $a_n, b_n$  が存在して

$$S_n = \frac{a_n}{2^{f(n)} b_n}$$

と表されることを示せ.

(2)  $n \geq 2$  のとき  $S_n$  は整数にならないことを示せ.

(3) さらに, 自然数  $m, n$  ( $m < n$ ) に対して, 和

$$S_{m,n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n}$$

を考える.  $S_{m,n}$  はどんな  $m, n$  ( $m < n$ ) に対しても整数にならないことを示せ.