

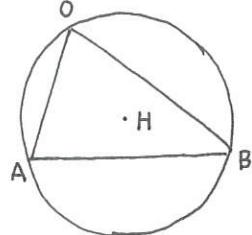
2015 年人間科学学部（文系）第 2 問

- 2 三角形 OAB において  $OA = 4$ ,  $OB = 5$ ,  $AB = 6$  とする。三角形 OAB の外心を H とするとき

$$\vec{OH} = \frac{\begin{array}{|c|}\hline \text{カ} \\ \hline \text{キ} \\ \hline \end{array}}{7} \vec{OA} + \frac{\begin{array}{|c|}\hline \text{ク} \\ \hline \text{ケ} \\ \hline \end{array}}{35} \vec{OB}$$

である。

$$\vec{OH} = s \vec{OA} + t \vec{OB} \text{ とおく}$$



$$|\vec{OA}| = 4, |\vec{OB}| = 5,$$

$$|\vec{AB}| = 6 \text{ より}, |\vec{OB} - \vec{OA}|^2 = 36$$

$$\therefore |\vec{OB}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OA}|^2 = 36$$

$$\therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{5}{2}$$

$$|\vec{OH}|^2 = s^2 |\vec{OA}|^2 + 2st \vec{OA} \cdot \vec{OB} + t^2 |\vec{OB}|^2$$

$$= 16s^2 + 5st + 25t^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|\vec{AH}|^2 = |\vec{OH} - \vec{OA}|^2$$

$$= |\vec{OH}|^2 - 2\vec{OA} \cdot (s\vec{OA} + t\vec{OB}) + |\vec{OA}|^2$$

$$= 16s^2 + 5st + 25t^2 - 32s - 5t + 16 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$|\vec{BH}|^2 = |\vec{OH} - \vec{OB}|^2$$

$$= |\vec{OH}|^2 - 2\vec{OB} \cdot (s\vec{OA} + t\vec{OB}) + |\vec{OB}|^2$$

$$= 16s^2 + 5st + 25t^2 - 5s - 50t + 25 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$H$  は外心より  $|\vec{OH}| = |\vec{AH}| = |\vec{BH}|$  なので  $\textcircled{1} \sim \textcircled{3}$  で

$$\begin{cases} 32s + 5t = 16 \\ 5s + 50t = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{3}{7} \\ t = \frac{16}{35} \end{cases}$$

$$\therefore \vec{OH} = \frac{3}{7} \vec{OA} + \frac{16}{35} \vec{OB}$$