

2014年 基幹理工・創造理工・先進理工 第5問

5 Oを原点とする座標平面上に

$$\text{放物線 } C_1 : y = x^2, \text{ 円 } C_2 : x^2 + (y - a)^2 = 1 \quad (a \geq 0)$$

がある。  $C_2$  の点  $(0, a+1)$  における接線と  $C_1$  が2点  $A, B$  で交わり、  $\triangle OAB$  が  $C_2$  に外接しているとする。次の問に答えよ。

- (1)  $a$  を求めよ。
- (2) 点  $(s, t)$  を  $(-1, a), (1, a), (0, a-1)$  と異なる  $C_2$  上の点とする。そして点  $(s, t)$  における  $C_2$  の接線と  $C_1$  との2つの交点を  $P(\alpha, \alpha^2), Q(\beta, \beta^2)$  とする。このとき、  $(\alpha - \beta)^2 - \alpha^2 \beta^2$  は  $s, t$  によらない定数であることを示せ。
- (3) (2)において、点  $P(\alpha, \alpha^2)$  から  $C_2$  への2つの接線が再び  $C_1$  と交わる点を  $Q(\beta, \beta^2), R(\gamma, \gamma^2)$  とする。 $\beta + \gamma$  および  $\beta\gamma$  を  $\alpha$  を用いて表せ。
- (4) (3)の2点  $Q, R$  に対し、直線  $QR$  は  $C_2$  と接することを示せ。