0001761098328999

和歌山県立医科大学

2012年 医学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 自然数の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 2,\quad b_1 = 5,\quad a_{n+1} = {a_n}^2 + {b_n}^2,\quad b_{n+1} = 2a_nb_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．このとき，すべての自然数 n に対して，a_n と b_n の最大公約数は1であることを示せ．

$$\begin{aligned} a_{n+1} \pm b_{n+1} &= (a_n \pm b_n)^2 \\ &= (a_{n-1} \pm b_{n-1})^{2^2} \\ &= (a_{n-2} \pm b_{n-2})^{2^3} \\ &\ \ \vdots \\ &= (a_1 \pm b_1)^{2^n} \quad \text{(複号同順)} \end{aligned}$$

となるから． $a_n \pm b_n = (a_1 \pm b_1)^{2^{n-1}}$

$\therefore\ a_n + b_n = 7^{2^{n-1}} \cdots ①$ ， $a_n - b_n = (-3)^{2^{n-1}} \cdots ②$

①より． a_n と b_n の最大公約数は 7^k (k は0以上の整数) と表せる．

②より． a_n と b_n の最大公約数は $(-3)^l$ (l は0以上の整数) と表せる．

以上より． 7と (-3) は互いに素であるから． $7^k = (-3)^l \iff k = l = 0$

すなわち． a_n と b_n の最大公約数は1である ▨

(別) 数学的帰納法で示す方法もある．

「2以上の n に対して．a_n は奇数，b_n は偶数 であり．

a_n と b_n の最大公約数は1である」 ← これを帰納法でいう

波線部を付けて示すのがポイント．