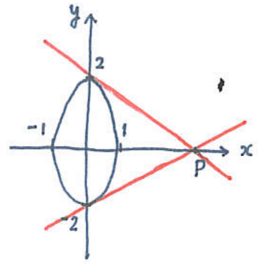
久留米大学

2014年 医学部 第6問

$\frac{2}{\sqrt{p^2-1}}x-\frac{2p}{\sqrt{p^2-1}}$　$-\frac{2}{\sqrt{p^2-1}}x+\frac{2p}{\sqrt{p^2-1}}$

6 点 $(p,\ 0)$ を通り，楕円 $4x^2+y^2=4$ に接する直線の方程式は $y=$ 15 および $y=$ 16 で，接点の x 座標は $x=$ 17 である．また，$p=$ 18 のとき，2つの接線は直交する．ここで，p は実数で $p>2$ とする．

$\frac{1}{p}$　$\sqrt{5}$



$p>2$ より．接線は y軸に平行ではない

よって．接線を $y=ax+b$ とおくと．

$(p,0)$ を通ることより，$0=pa+b$　$\therefore\ b=-ap$

$\therefore$ 接線は $y=ax-ap$

これを $4x^2+y^2=4$ に代入して．

$$4x^2+a^2x^2-2a^2px+a^2p^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow\ (a^2+4)x^2-2a^2px+a^2p^2-4=0\quad\cdots(*)$$

判別式をDとおくと．重解をもつことから．

$$D/4=(-a^2p)^2-(a^2+4)(a^2p^2-4)=0$$

$$\therefore\ a^4p^2-(a^4p^2-4a^2+4a^2p^2-16)=0$$

$$\therefore\ 4a^2(1-p^2)=-16$$

$$\therefore\ a=\pm\frac{2}{\sqrt{p^2-1}}$$

$\therefore$ 接線は．$\underline{y=\frac{2}{\sqrt{p^2-1}}x-\frac{2p}{\sqrt{p^2-1}}}$ 〃 と $\underline{y=-\frac{2}{\sqrt{p^2-1}}x+\frac{2p}{\sqrt{p^2-1}}}$ 〃

このとき $(*)$ の重解の方程式が接点の x 座標より．$\underline{x=\frac{1}{p}}$ 〃

接線が直交するのは．

$$\frac{2}{\sqrt{p^2-1}}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{p^2-1}}\right)=-1\ \Leftrightarrow\ \frac{4}{p^2-1}=1\quad\therefore\ p>2\ より\ \underline{p=\sqrt{5}}\ 〃$$

数理研