2016年 理系 第3問

$\boxed{3}$ k を正の定数とする．関数 $f(x)=kx^2-2\log x+1$ について，曲線 $y=f(x)$ を C とする．次の問いに答えよ．ただし，自然対数の底を e で表す．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を k を用いて表せ．

(2) 曲線 C が x 軸と接するとき，k の値を求めよ．

(3) k が (2) で求めた値のとき，曲線 C と x 軸および直線 $x=2e$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $f'(x)=2kx-\dfrac{2}{x}$

$=\dfrac{2k}{x}\left(x^2-\dfrac{1}{k}\right)$

$=\dfrac{2k}{x}\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{k}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

極小

$k>0$ より，$f'(x)=0$ となるのは，$x=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ のとき

右の増減表より，極小値 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)=k\cdot\dfrac{1}{k}-2\log\dfrac{1}{\sqrt{k}}+1$

$=2-2\log k^{-\frac{1}{2}}$

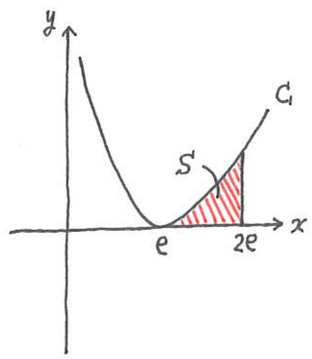
$=\underline{2+\log k}$ //

(2) C が x 軸と接するのは，極小値が 0 のときなので (1) より，

$2+\log k=0$

$\therefore\ \log k=-2$

$\therefore\ \underline{k=\dfrac{1}{e^2}}$ //



(3) (2)のとき，$\dfrac{1}{\sqrt{k}}=e$ であるから グラフは右のようになる．

$\therefore\ S=\displaystyle\int_e^{2e}\frac{1}{e^2}x^2-2\log x+1\,dx$

$=\displaystyle\int_e^{2e}\frac{1}{e^2}x^2+1\,dx-2\int_e^{2e}(x)'\log x\,dx$

$=\left[\dfrac{1}{3e^2}x^3+x\right]_e^{2e}-2\left[x\log x\right]_e^{2e}+2\displaystyle\int_e^{2e}dx$

$=\dfrac{1}{3e^2}\cdot 8e^3+2e-\left(\dfrac{1}{3e^2}\cdot e^3+e\right)-2\left(2e\log 2e-e\right)+2(2e-e)$

$=\dfrac{8}{3}e+2e-\dfrac{1}{3}e-e-4e(1+\log 2)+2e+2e$

$=\underline{\dfrac{2}{3}e\cdot(5-6\log 2)}$ //