0001843816518999

公立はこだて未来大学

2014年 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 次のように定められる2つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，以下の問いに答えよ．

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{1+a_n},\quad b_{n+1}=b_n+\frac{1}{a_n},\quad b_1=1,\quad b_2=4$$

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $b_2=b_1+\dfrac{1}{a_1}$ より　$a_1=\dfrac{1}{3}$

$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1+a_n}$　であるから．a_n は帰納的に $a_n>0$ であることが分かる．

∴両辺逆数をとって，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1+a_n}{2a_n}$　∴ $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{2a_n}+\dfrac{1}{2}$

∴ $\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a_n}-1\right)$

∴数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$ は初項 $\dfrac{1}{a_1}-1=2$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列．

∴ $\dfrac{1}{a_n}-1=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$　∴ $\dfrac{1}{a_n}=1+\dfrac{1}{2^{n-2}}$

これより．$a_n=\dfrac{2^{n-2}}{2^{n-2}+1}=\underline{\dfrac{2^n}{2^n+4}}$ //

(2)(1)より．$b_{n+1}-b_n=1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

階差数列

∴ $n\geqq 2$ に対して，$b_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}\right\}$

$$=1+(n-1)+\frac{2\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=n+4-\frac{1}{2^{n-3}}$$

これは $b_1=1$（$n=1$ の場合）もみたす

∴ $\underline{b_n=n+4-\dfrac{1}{2^{n-3}}}$ //