愛知教育大学

2014年第8問

8 $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 自然数nに対して，$(AB)^n$を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ．

(2) 自然数nに対して，$(BA)^n$を求めよ．

(1) $(AB)^1=AB=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ ， $(AB)^2=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$

$(AB)^3=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\therefore (AB)^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&1\end{pmatrix}$ と推測し，数学的帰納法で示す

(i) $n=1$ のときは $(AB)^1=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ となり成り立つ

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定すると，$(AB)^k=\begin{pmatrix}2^k&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\therefore (AB)^{k+1}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^k&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{k+1}&0\\0&1\end{pmatrix}$ $\therefore$ $n=k+1$ のとき成り立つ

(i)，(ii) より，自然数 n について $(AB)^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\0&1\end{pmatrix}$ が成り立つ ▨

(2) $n=1$ のとき，

$(BA)^1=BA=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\0&1\end{pmatrix}$

$n\geqq 2$ のとき，

$(BA)^n=B\cdot(AB)^{n-1}\cdot A$

$\therefore$ (1)の結果より

$(BA)^n=B\cdot\begin{pmatrix}2^{n-1}&0\\0&1\end{pmatrix}A$

$=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{n-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2^n&-2^n+1\\0&1\end{pmatrix}$

これは $n=1$ のときも含んでいる

$\therefore (BA)^n=\begin{pmatrix}2^n&-2^n+1\\0&1\end{pmatrix}$ //