

2013年 工学科学 第3問

3 a を正の定数とし、 m を自然数とする。 xy 平面上の2曲線 $C_1 : y = ax^2 (x \geq 0)$, $C_2 : y = (\log x)^m (x \geq 1)$ および点 P は次の条件を満たしている。

C_1 と C_2 は P を通り、 P における C_1 の接線と P における C_2 の接線は一致する。

(1) a の値および P の x 座標を m を用いて表せ。

(2) 関数 $f(x) = \frac{(\log x)^m}{x^2} (x \geq 1)$ の最大値を求め、 $x \geq 1$ において不等式 $ax^2 \geq (\log x)^m$ が成り立つことを示せ。

(3) 自然数 n に対して、不定積分 $\int (\log x)^n dx$ を I_n とおく。 $n \geq 2$ のとき、部分積分法により、 I_n を I_{n-1} を用いて表せ。

(4) $m = 2$ のとき、 C_1 , C_2 および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。