

2013年工学部第3問

3 関数 $f(x) = \log x$ がある. 曲線 $y = f(x)$ の点 $(t, \log t)$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とするとき, 次に答えよ. ただし, 対数は自然対数を表し, e は自然対数の底とする.

(1) $x > 0$ のとき, 不等式 $f(x) - g(x) \leq 0$ を証明せよ.

(2) $t > \frac{1}{2}$ のとき, $\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} f(x) dx$ と $\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} g(x) dx$ をそれぞれ t を用いて表せ.

(3) 自然数 n に対して, $n!$ と $\sqrt{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ の大小を比較せよ.