東京農工大学

2014年 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

4　p を正の実数とする．関数

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\{p-\log(1+|t|)\}\,dt$$

について，次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) xy 平面の曲線 $y=f(x)$ が x 軸の正の部分と 2 点で交わるような，p の値の範囲を求めよ．

(1) 与式の両辺を x で微分して，

$f'(x)=p-\log(1+|x|)$

$\therefore$ $f'(x)=0$ となるのは，$\log(1+|x|)=p$ のとき．

$\therefore$ $1+|x|=e^p$　　$\therefore$ $x=\underbrace{1-e^p}_{<0},\ \underbrace{e^p-1}_{>0}$

$\therefore$ 増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	$1-e^p$	$\cdots$	e^p-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		極小		極大	

$x\leqq 0$ のとき，

$f(x)=\int_{-1}^{x}\{p-\log(1-t)\}\,dt$

$=\Big[pt-(t-1)\log(1-t)+t\Big]_{-1}^{x}$

$=px-(x-1)\log(1-x)+x+p-2\log 2+1$

$=(p+1)(x+1)+(1-x)\log(1-x)-2\log 2$

$x>0$ のとき，

$f(x)=\int_{-1}^{0}\{p-\log(1-t)\}\,dt+\int_{0}^{x}\{p-\log(1+t)\}\,dt$

$=\Big[pt-(t-1)\log(1-t)+t\Big]_{-1}^{0}+\Big[pt-(t+1)\log(1+t)+t\Big]_{0}^{x}$

$=p+1-2\log 2+px-(1+x)\log(1+x)+x$

$=(p+1)(x+1)-(1+x)\log(1+x)-2\log 2$

$1-e^p<0$，$e^p-1>0$ に注意すると，

極小値は，$f(1-e^p)=(p+1)(2-e^p)+pe^p-2\log 2=2p+2-e^p-2\log 2$ //

極大値は，$f(e^p-1)=e^p-2\log 2$ //

2014年 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

4　p を正の実数とする．関数

$$f(x) = \int_{-1}^{x} \{p - \log(1 + |t|)\}\, dt$$

について，次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

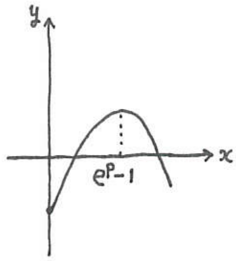
(2) xy 平面の曲線 $y = f(x)$ が x 軸の正の部分と2点で交わるような，p の値の範囲を求めよ．

(2) (1)の増減表より，$f(x)$ は，

$0 \leqq x < e^p - 1$ において単調増加，$e^p - 1 < x$ において単調減少

また，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left[(1+x)\{p+1-\log(1+x)\} - 2\log 2 \right]$

$= -\infty$



よって．$y = f(x)$ が x 軸の正の部分と2点で交わるのは．

$f(0) < 0$ かつ $f(e^p - 1) > 0$ のとき．

すなわち．$p + 1 - 2\log 2 < 0$ かつ．$e^p - 2\log 2 > 0$

$\therefore\ p < 2\log 2 - 1$ かつ $p > \log(2\log 2)$ $\cdots$ ①

いま，$g(x) = x - 1 - \log x\ (x > 0)$ とおくと

$g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

$\therefore\ g(x)$ は $x > 1$ において単調増加で，$g(x) > g(1) = 0\ (x > 1)$

$2\log 2 > 1$ より，$2\log 2 - 1 - \log(2\log 2) > 0$

すなわち，$\log(2\log 2) < 2\log 2 - 1$

$\therefore$ ①より，$\underline{\log(2\log 2) < p < 2\log 2 - 1}$ //