和歌山大学

2014年 第5問

数理 石井K

5 次の条件を満たす2次正方行列 A, B がある．

$$A^2=E,\quad B^2=-E,\quad AB+BA=O$$

ただし，E は単位行列，O は零行列である．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 次の(i), (ii), (iii)が成り立つことを示せ．

(i) $(A+B+AB)^2=E$　(ii) $A+B\neq O$　(iii) $AB\neq E$

(2) $(A+B)C=O$ となる零行列でない2次正方行列 C が存在することを示せ．

(1) (i) $(A+B+AB)^2=(A+B+AB)(A+B+AB)$

$=A^2+AB+A^2B+BA+B^2+BAB+ABA+AB^2+ABAB$

$=E+B-E+B\cdot(-BA)+A(-AB)-A+A\cdot(-AB)\cdot B$

$=B+A-B-A+E$

$=E$ ■

(ii) $A+B=O$ と仮定して背理法で示す

このとき，$B=-A$ なので $AB+BA=-2A^2=O$　∴ $A^2=O$ となり $A^2=E$ に矛盾

∴ $A+B\neq O$ ■

(iii) $AB=E$ と仮定して背理法で示す

左から A をかけて，$A^2B=A$　∴ $B=A$ となるが $A^2=E$, $B^2=-E$ より

$A\neq B$ なので矛盾　∴ $AB\neq E$ ■

(2) $(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

$=E+O-E$

$=O$

∴ $C=A+B$ とおくと，(ii)より $C\neq O$，$(A+B)C=O$

となり，存在する ■