2015年 工学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $f(x) = e^{-2x}$ とする．曲線 $C : y = f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線が x 軸と交わる点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ 0)$ とする．次に C 上の点 $(x_1,\ f(x_1))$ における接線が x 軸と交わる点を $\mathrm{P}_2(x_2,\ 0)$ とする．以下同様に $n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots$ に対して C 上の点 $(x_{n-1},\ f(x_{n-1}))$ における接線が x 軸と交わる点を $\mathrm{P}_n(x_n,\ 0)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) x_1 を求めよ．

(2) x_{n+1} を x_n で表せ．また x_n を n で表せ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k x_k$ を求めよ．

(1) $f'(x) = -2e^{-2x}$

$\therefore$ $(1, f(1))$ における接線は. $y = -\dfrac{2}{e^2}(x-1) + \dfrac{1}{e^2}$

$\therefore$ $y = -\dfrac{2}{e^2}x + \dfrac{3}{e^2}$

$\therefore$ x 軸との交点は $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$　　$\therefore$ $\underline{x_1 = \dfrac{3}{2}}$ //

(2) (1)と同様にして, $(x_n, f(x_n))$ における接線は.

$y = -2e^{-2x_n}(x - x_n) + e^{-2x_n}$

$\therefore$ $y = -2e^{-2x_n}\cdot x + (1+2x_n)e^{-2x_n}$

$\therefore$ $y=0$ を代入して, $e^{-2x_n}\{-2x + (1+2x_n)\} = 0$

$e^{-2x_n} > 0$ より, $x = \dfrac{1}{2} + x_n$　　すなわち, $\underline{x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{2}}$ //

$\{x_n\}$ は初項 $\dfrac{3}{2}$, 公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列より, $x_n = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}(n-1)$　　$\therefore$ $\underline{x_n = \dfrac{1}{2}n + 1}$ //

(3) $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k x_k$ とおくと.

$S = \dfrac{3}{2}\cdot 3^1 + 2\cdot 3^2 + \dfrac{5}{2}\cdot 3^3 + 3\cdot 3^4 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}n+1\right)\cdot 3^n$ $\cdots$ ①

$3S = \dfrac{3}{2}\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + \dfrac{5}{2}\cdot 3^4 + \cdots + \left(\dfrac{1}{2}n+\dfrac{1}{2}\right)\cdot 3^n + \left(\dfrac{1}{2}n+1\right)\cdot 3^{n+1}$ $\cdots$ ②

②−① より, $2S = -\dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\left(3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^n\right) + \left(\dfrac{1}{2}n+1\right)\cdot 3^{n+1}$

$= -\dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3^{n+1}-9}{2} + \left(\dfrac{1}{2}n+1\right)\cdot 3^{n+1}$

$= \left(\dfrac{1}{2}n + \dfrac{3}{4}\right)\cdot 3^{n+1} - \dfrac{9}{4}$

$\therefore$ $\underline{S = \left(\dfrac{1}{4}n + \dfrac{3}{8}\right)\cdot 3^{n+1} - \dfrac{9}{8}}$ //