

2010年 初等教育 第2問

2 次の問いに答えよ。

- (1) 恒等式 $\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\} = x^3+y^3+z^3-3xyz$ が成り立つことを示せ。
- (2) $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ のとき, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのは $a=b=c$ のときであることを示せ。
- (3) 一辺の長さがそれぞれ a, b, c の三角形の面積は $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で与えられることが知られている。ただし, $s = \frac{a+b+c}{2}$ とする。三辺の長さの和が $2s$ ($s > 0$) であるような三角形の面積は $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ 以下であることを示せ。また, 面積が $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$ となるのは, 三角形が正三角形のときであることを示せ。